



COURS

TESTS D'APTITUDE NUMÉRIQUE

POURCENTAGES - INTÉRÊTS SIMPLES ET COMPOSÉS

On utilise les pourcentages pour traduire des situations de proportionnalité. Dans un pourcentage, on compare cette proportion à **une base de 100**. Dire que le corps humain est constitué de 60 % d'eau signifie que **100 g** de corps humain contient **60 g** d'eau.

Un pourcentage est mathématiquement représenté par une fraction sur 100.

P % correspond à la fraction $\frac{P}{100}$. $5\% = \frac{5}{100}$; $23,6\% = \frac{23,6}{100}$

Appliquer un pourcentage de P % à un nombre revient à le multiplier par $\frac{P}{100}$.

POURCENTAGE D'UN NOMBRE OU D'UNE QUANTITÉ

Exemple 1 : Sachant que le corps humain est constitué de 60 % d'eau, quel est le poids d'eau d'une personne pesant 70 kg ?

Il convient d'effectuer le calcul suivant : $70 \times \frac{60}{100} = 70 \times 0,6 = 42$ kg.

Remarque : il est possible de résoudre ce problème avec un produit en croix. 60 % signifie que pour 100 g de corps humain, nous avons 60 g d'eau.

Produit en croix :

70 kg = 70 000 g

Corps humain	Eau
100 g	60 g
70 000 g	Y g

Avec $100 \times Y = 70\,000 \times 60 \Rightarrow Y = \frac{70\,000 \times 60}{100} = 7\,000 \times 6 = 42\,000$ g = 42 kg.

Dans cet exemple, nous connaissons la valeur à laquelle s'appliquait le taux de pourcentage. Il s'agissait d'un problème de **pourcentage direct**. Quand on ne connaît pas la valeur à laquelle s'applique le taux de pourcentage, on parle d'un problème de **pourcentage indirect**.

Exemple 2 : Dans un centre de recherche, 48 personnes sont des femmes. Combien de personnes travaillent dans ce centre, sachant 24 % du personnel est constitué de femmes ?

24 % signifie que pour 100 personnes, 24 sont des femmes.

Soit le tableau de proportionnalité suivant :

Femmes	Personnel
24	100
48	Y ?

Produit en croix : $24 \times Y = 48 \times 100 \Rightarrow Y = 4\,800 / 24 = 200$.

Le centre compte 200 personnes ; 48 sont des femmes.

- En raisonnant directement à partir du pourcentage (24 %) soit la fraction $\frac{24}{100}$:

Nombre total de personnes $\times \frac{24}{100}$ = nombre de femmes.

$\Rightarrow$ Nombre total de personnes = nombre de femmes $\times \frac{100}{24}$.

$\Rightarrow$ Nombre total de personnes = $48 \times \frac{100}{24} = 4\,800 / 24 = 200$.

❖ Sur le plan pratique :

Pourcentage direct

Pour appliquer un pourcentage à une valeur, on transforme le pourcentage en un nombre décimal et on **multiplie** la valeur par le nombre décimal.

Exemple : 48 % des 2 250 membres du club sont des femmes. Calculez le nombre de femmes.

$62 / 100 = 0,62$; le nombre de femmes est $2\,250 \times 0,62 = 1\,395$.

Pourcentage indirect

Pour calculer une valeur dont on connaît un pourcentage, on transforme le pourcentage en un nombre décimal et on **divise** le nombre donné dans le problème par le nombre décimal.

Exemple : 1 395 femmes sont membres du club. Elles représentent 62 % de l'ensemble des membres du club. Combien de membres comptabilise le club ?

$62 / 100 = 0,62$; nombre total de membres = $1\,395 / 0,62 = 2\,250$.

CALCULER UN TAUX DE POURCENTAGE

À un concours d'entrée d'une grande école, 96 candidats sont reçus sur 800. Quel est le taux de réussite au concours ?

Comme les pourcentages correspondent à des proportionnalités basées sur la grandeur 100, pour connaître le taux de réussite, il suffit de chercher combien de candidats auraient été reçus s'il s'en était présenté 100.

Nombre de candidats	Nombre de reçus
800	96
100	Y ?

Produit en croix : $800 \times Y = 100 \times 96$ d'où $Y = \frac{100 \times 96}{800} = \frac{9600}{800} = 12$; la réponse est 12 %.

Sur le plan pratique, pour calculer le taux de pourcentage d'une valeur A par rapport à une valeur B, on divise A par B et on multiplie le résultat par 100.

Reprenons le problème précédent. Le **taux de réussite** correspond à $\frac{\text{nombre de } \textcolor{red}{\text{reçus}}}{\text{nombre de candidats}} \times 100 =$

$\frac{96}{800} \times 100 = 0,12 \times 100 = 12 \%$.



Attention à ne pas inverser numérateur et dénominateur !

Souvenez-vous que, si vous cherchez le pourcentage d'éléments présentant une caractéristique particulière parmi tous les éléments d'un ensemble, le rapport est de type :

$$\frac{\text{Nombre d'éléments présentant la caractéristique}}{\text{Nombre total des éléments de l'ensemble}}$$

POUCENTAGES ADDITIFS

Une maison d'édition française publie 2 780 000 livres par an. Elle en vend 20 % aux États-Unis, 12 % au Canada et 15 % au Brésil. Combien de livres sont vendus chaque année à l'étranger ?

Pour appliquer plusieurs pourcentages à une même valeur, on additionne les pourcentages et on applique le pourcentage obtenu à la valeur.

Pourcentage global = 20 % + 12 % + 15 % = 47 %.

47 % = 0,47.

Nombre de livres vendus à l'étranger = 2 780 000 x 0,47 = 1 306 600.

Cette propriété peut être utile pour calculer mentalement le pourcentage d'une valeur.

Calculer 15 % de 320 revient à calculer (10 % de 320) + (5 % de 320).

- 10 % de 320 = 32.
- 5 % est la moitié de 10 % donc 5 % de 320 = 32/2 = 16.
- 15 % de 320 = 10 % de 320 + 5 % de 320 = 32 + 16 = 48.

POUCENTAGES SUCCESSIFS

Par pourcentages successifs, on veut dire que les pourcentages s'appliquent les uns après les autres (chaque pourcentage, mis à part le premier, s'applique au résultat précédent).

Pour appliquer des pourcentages successifs à une valeur initiale, on multiplie la valeur initiale par le produit des pourcentages.

Dans une biscuiterie, 6 000 gâteaux sont confectionnés chaque jour. 20 % des gâteaux sont au chocolat. Parmi ces gâteaux au chocolat, 12 % sont décorés avec de la vanille. Quel est le nombre de gâteaux au chocolat avec une décoration à la vanille ?

- Première méthode : on décompose les calculs.
Nombre de gâteaux au chocolat = 6 000 x 20 / 100 = 1 200.
Nombre gâteaux au chocolat avec une décoration = 1 200 x 12 / 100 = 144.
- Seconde méthode : on multiplie la valeur initiale par le produit des pourcentages.
Nombre de gâteaux au chocolat avec une décoration = 6 000 x 0,2 x 0,12 = 144.

POUCENTAGE D'ÉVOLUTION ET COEFFICIENT MULTIPLICATEUR

Soit un article dont la valeur passe de la valeur initiale 100 € à la valeur finale 160 €.

L'augmentation du prix est égale à $160 - 100 = 60$ €.

La variation relative du prix = $\frac{160-100}{100} = 0,6 = \frac{60}{100} = 60\%$.

On appelle **coefficient multiplicateur** (CM), le nombre par lequel il faut multiplier 100 € pour obtenir 160 €.

$100 \times \text{CM} = 160 \Rightarrow \text{CM} = 160 / 100 = 1,6$.

Le pourcentage d'évolution est égal au coefficient multiplicateur moins 1.

$$\text{P\%} = \text{CM} - 1$$

Dans l'exemple précédent le **pourcentage d'augmentation** est égal à $1,6 - 1 = 0,6 = 60\%$.

Pour calculer une **diminution** de P% on utilise la formule :

$$\text{Valeur initiale} \times \text{coefficient multiplicateur avec CM} = 1 - \frac{P}{100}$$

Pour calculer une **augmentation** de P% on utilise la formule :

$$\text{Valeur initiale} \times \text{coefficient multiplicateur avec CM} = 1 + \frac{P}{100}$$

Exemples :

Un article initialement vendu 180 € bénéficie d'une réduction de 45 %. Quel est son nouveau prix ?

Nouveau prix = $180 \times \text{CM}$ avec $\text{CM} = 1 - 0,45 = 0,55$.

Nouveau prix = $180 \times 0,55 = 99$ €.

Un article initialement vendu 180 € subit une augmentation de 45 %. Quel est son nouveau prix ?

Nouveau prix = $180 \times \text{CM}$ avec $\text{CM} = 1 + 0,45 = 1,45$.

Nouveau prix = $180 \times 1,45 = 261$ €.

Dans le cas d'une hausse, le coefficient multiplicateur est supérieur à 1.

- Pour une hausse de 10 %, le coefficient est égal à $1 + 0,1$ soit 1,1.
- Pour une hausse de 25 %, le coefficient est égal à $1 + 0,25$ soit 1,25.
- Pour une hausse de 69 %, le coefficient est égal à $1 + 0,69$ soit 1,69.

Augmenter de 100 %, c'est multiplier par 2.

Augmenter de 200 %, c'est multiplier par 3.

Augmenter de 300 %, c'est multiplier par 4.

Dans le cas d'une baisse, le coefficient multiplicateur est inférieur à 1.

- Pour une baisse de 10 %, le coefficient est égal à $1 - 0,1$ soit 0,9.
- Pour une baisse de 25 %, le coefficient est égal à $1 - 0,25$ soit 0,75.
- Pour une baisse de 69 %, le coefficient est égal à $1 - 0,69$ soit 0,31.

Diminuer de 100 %, c'est multiplier par 2.

Diminuer de 200 %, c'est multiplier par 3.

Diminuer de 300 %, c'est multiplier par 4.

POUCENTAGES D'AUGMENTATION OU DE DIMINUTION

Un jouet qui coûtait 240 € a été soldé 192 €. Quel a été le pourcentage de remise ?

Le montant de la remise est égal à 240 – 192, soit 48 €.

Pour connaître la réponse, il suffit de calculer la remise dont on aurait bénéficié si le jouet avait coûté 100 €.

Prix initial	Remise
240	48
100	Y ?

Produit en croix : $240 \times Y = 48 \times 100$ d'où $Y = \frac{4800}{240} = 20$; pourcentage de remise : 20 %.

D'une manière générale, le pourcentage P d'augmentation ou de diminution correspond au rapport de l'augmentation ou de la diminution sur la valeur initiale, multiplié par 100.

Pour une augmentation $\Rightarrow$ valeur finale > valeur initiale ; on aura :

$$P = \frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$$

Pour une diminution $\Rightarrow$ valeur finale < valeur initiale ; on aura :

$$P = \frac{\text{valeur initiale} - \text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$$

Reprenons l'exemple du jouet vendu normalement 240 € et soldé 192 €. Il s'agit d'une diminution.

$$P = \frac{\text{valeur initiale} - \text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} \times 100 = \frac{240 - 192}{240} \times 100 = \frac{48}{240} \times 100 = 20 \Rightarrow P = 20 \% \text{ de baisse.}$$

Si le jouet vendu initialement 240 € est désormais affiché à 288 €, quel est le taux d'augmentation ?

$$P = \frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100 = \frac{288 - 240}{240} \times 100 = \frac{48}{240} \times 100 = 20 \Rightarrow P = 20 \% \text{ d'augmentation.}$$

CALCULER LA VALEUR INITIALE APRÈS UNE AUGMENTATION DE P %

Soit V_i , la valeur initiale d'un objet. Soit V_f , la valeur finale de cet objet après une augmentation de P %.

$$V_f = V_i + V_i \times \frac{P}{100} \Rightarrow V_f = V_i \times \left(1 + \frac{P}{100}\right) \Rightarrow \mathbf{V_i = \frac{V_f}{1 + \frac{P}{100}}}$$

Au casino, un joueur, après avoir gagné à la roulette, voit augmenter de 30 % la somme qu'il avait en entrant. Il dispose désormais de 1 300 euros. Quelle somme avait-il au départ ?

$$\text{Pour } P = 30 \% \Rightarrow \left(1 + \frac{P}{100}\right) = 1 + \frac{30}{100} = 1,3.$$

$$V_i = \frac{1300}{1,3} = 1\,000 ; \text{ le joueur est arrivé au casino avec } 1\,000 \text{ €.}$$

Avec un tableau :

Somme initiale en entrant	100	Y ?
Somme après gains à la roulette	130	1 300

Si on a une augmentation de 30 %, alors pour une somme initiale de 100 €, la somme après les gains à la roulette s'élève à 130 € (100 + 30).

$$\text{Produit en croix : } 100 \times 1\,300 = 130 \times Y \Rightarrow Y = \frac{100 \times 1\,300}{130} = \frac{130\,000}{130} = 1\,000.$$



Attention : dans ce type de problèmes, l'erreur serait de partir de la valeur finale (1 300 €) et de la diminuer de 30 %.

CALCULER LA VALEUR INITIALE APRÈS UNE DIMINUTION DE P %

Soit V_i , la valeur initiale d'un objet. Soit V_f , la valeur finale de cet objet après une diminution de P%.

$$V_f = V_i - V_i \times \frac{P}{100} \Rightarrow V_f = V_i \times \left(1 - \frac{P}{100}\right) \Rightarrow \mathbf{V_i = \frac{V_f}{1 - \frac{P}{100}}}$$

Suite à une baisse du loyer de 3 %, M. Duroc ne paye plus que 679 € chaque mois. Quel était le montant de son loyer avant la baisse ?

$$\text{Pour } P = 3 \% \Rightarrow \left(1 - \frac{P}{100}\right) = 1 - 0,03 = 0,97.$$

$$V_i = \frac{679}{0,97} = 700 ; \text{ montant du précédent loyer : } 700 \text{ €.}$$

Avec un tableau :

Loyer avant la baisse	100	Y ?
Loyer après la baisse	97	679

Si l'on a une diminution de 3 % du loyer alors pour un loyer de 100 €, le nouveau loyer s'élève à 97 euros (100 – 3).

$$\text{Produit en croix : } 100 \times 679 = 97 \times Y \Rightarrow Y = \frac{100 \times 679}{97} = \frac{67\,900}{97} = 700.$$

AUGMENTATION ET DIMINUTION D'UNE VALEUR SUITE À DES POURCENTAGES SUCCESSIFS

Exemple 1

Un loyer augmente de 3 % la première année et de 2 % la deuxième année.

Si le montant du loyer (L_0) était de 350 euros avant la première augmentation, quel est le montant du loyer (L_2) lors de la deuxième année ?

Soit L_1 le montant du loyer la première année et L_2 le montant la deuxième année.

Utilisons les coefficients multiplicateurs.

Pour L_1 , on a une augmentation de 3 %. Le coefficient = $1 + \frac{3}{100} = 1 + 0,03 = 1,03$.

Pour L_2 , on a une augmentation de 2 %. Le coefficient = $1 + \frac{2}{100} = 1 + 0,02 = 1,02$.

Première hausse : $L_1 = L_0 \times 1,03$.

Seconde hausse : $L_2 = L_1 \times 1,02$.

On remplace L_1 dans la seconde égalité par sa valeur ($L_0 \times 1,03$), on obtient :

$L_2 = L_0 \times 1,03 \times 1,02$.

$L_2 = 350 \times 1,03 \times 1,02 = 367,71$.

Le coefficient multiplicateur global = $1,03 \times 1,02 = 1,0506$.

Exemple 2

Une action boursière augmente de 25 %, puis diminue successivement de 10 % et de 15 %. Le prix de l'action est-il revenu à son prix de départ ?

Coefficient multiplicateur pour une hausse de 25 % = $1 + 0,25 = 1,25$.

Coefficient multiplicateur pour une baisse de 10 % = $1 - 0,1 = 0,9$.

Coefficient multiplicateur pour une baisse de 15 % = $1 - 0,15 = 0,85$.

Coefficient multiplicateur global = $1,25 \times 0,9 \times 0,85 = 0,95625$.

Le coefficient multiplicateur global est inférieur à 1, donc le prix de l'action a globalement baissé.

Pour calculer la valeur finale après l'augmentation ou la diminution de la valeur initiale par des pourcentages successifs, on multiplie la valeur initiale par le produit des coefficients multiplicateurs.

Rappel :

Pour une hausse de P %, le coefficient multiplicateur = $(1 + \frac{P}{100})$

Pour une baisse de P %, le coefficient multiplicateur : $(1 - \frac{P}{100})$

Exemple 3

Après deux hausses successives, la première de 3 % et la seconde de 2 %, le loyer est de 367,71 €. Quel était le montant du loyer avant les augmentations ?

Avec L0, le prix avant toute augmentation, L1 le prix après la première augmentation et L2 le prix après la deuxième augmentation.

Hausse de 3 % ; le coefficient = $1 + \frac{3}{100} = 1,03$.

Hausse de 2 % ; le coefficient = $1 + \frac{2}{100} = 1,02$.

Prix initial du loyer $\times 1,03 \times 1,02 = 367,71 \Rightarrow$ Prix initial = $\frac{367,71}{1,02 \times 1,03} = \frac{367,71}{1,0506} = 350$.

POURCENTAGE D'ÉVOLUTION RÉCIPROQUE

Sachant que le prix d'un article a augmenté de 25 %, quel pourcentage de diminution (P) doit-on appliquer au nouveau prix pour retrouver le prix antérieur ?



L'erreur serait de conclure trop rapidement que ce pourcentage est de moins 25 % !

Pour retrouver le prix initial, il faut que le coefficient multiplicateur soit égal à 1.

Soit coefficient global (CM) = coefficient 1 $\times$ coefficient 2 = 1.

$$CM = \left(1 + \frac{25}{100}\right) \left(1 - \frac{P}{100}\right) = 1.$$

$$\left(1 + \frac{25}{100}\right) \left(1 - \frac{P}{100}\right) = 1 \Rightarrow 1 = 1,25 \left(1 - \frac{P}{100}\right) \Rightarrow \frac{1}{1,25} = \left(1 - \frac{P}{100}\right) \Rightarrow 0,8 = 1 - \frac{P}{100} \Rightarrow 0,2 = \frac{P}{100}$$

$$\Rightarrow P = 0,2 \times 100 = 20 \, \%.$$

Pour compenser une hausse de 25 % il faut effectuer une baisse de 20 %. Ce taux correspond au **taux d'évolution réciproque**.

Remarque : dans le cas d'évolutions réciproques, les coefficients multiplicateurs sont **inverses l'un de l'autre**.

Le premier coefficient multiplicateur (augmentation de 25 %) est égal à 1,25.

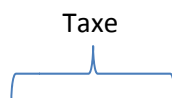
Le second coefficient dit réciproque doit être égal à $1/1,25 = 0,8$.

Comme $0,8 = 1 - 0,2$, une hausse de 25 % est compensée par une baisse de 20 % ($0,2 = \frac{20}{100}$).

CAS PARTICULIER DE LA TVA

Lorsque vous achetez un produit, la somme que vous réglez au commerçant, à moins d'une promotion particulière, est celle affichée sur l'étiquette du produit. Ce prix, dit TTC (toutes taxes comprises), ne correspond pas à la somme réellement perçue par le commerçant. Le prix TTC, comprend en effet une taxe, la TVA, que le commerçant doit reverser à l'État. La taxe s'ajoute au prix de vente hors taxe (HT), la somme que perçoit réellement le commerçant, pour donner le prix de vente toutes taxes comprises (TTC), la somme payée par le client.

Le calcul du prix TTC s'effectue ainsi :



$$\text{Prix TTC} = \text{Prix HT} + (\text{Prix HT} \times \text{taux de TVA})$$

Le taux de TVA est un pourcentage qui s'applique au prix HT.

Pour un taux de TVA de 19,6 %, un article vendu 100 € HT donnera lieu à une taxe de 19,6 €. Le prix TTC payé par le client sera de $100 + 19,6 = 119,6$ €. Sur ces 119,6 €, le commerçant devra reverser à l'État 19,6 €.

- Soit une machine à laver vendue 345 € HT. Quel est son prix TTC si le taux de TVA est de 19,6 % ?

$$\text{Prix TTC} = \text{Prix HT} + \text{Taxe} ; \text{taxe} = 19,6 \% \text{ de } 345 \text{ €} = \frac{19,6 \times 345}{100} = 67,62 \text{ €}.$$

$$\text{Prix TTC} = 345 + 67,62 = 412,62 \text{ €}.$$

- Quel est le prix TTC d'un téléviseur dont le prix HT est de 245 € si la TVA est de 19,6 % ?

On applique la formule : $\text{Prix TTC} = \text{Prix HT} + (\text{Prix HT} \times \text{taux de TVA})$.

$$\text{Prix TTC} = 245 + (245 \times 19,6/100) = 245 + (245 \times 0,196) = 245 + 48,02 = 293,02 \text{ €}.$$

Actuellement, on distingue en France trois taux principaux de TVA :

- Taux normal de 20 % (avant le premier janvier 2014, ce taux était de 19,6 %).
- Taux intermédiaire de 10 % (avant le premier janvier 2014, ce taux était de 7 %).
- Taux réduit de 5,5 %.

Si l'on applique la formule vue précédemment pour augmenter une valeur d'un pourcentage P on a :

$$\text{Prix TTC} = \text{Prix HT} \times \left(1 + \frac{19,6}{100}\right) = \text{Prix HT} \times \left(\frac{100+19,6}{100}\right) = \text{Prix HT} \times \frac{119,6}{100} = \text{Prix HT} \times 1,196.$$

- Pour un taux de TVA de 19,6 % :
 - ▣ Pour calculer un prix TTC, il suffit de multiplier le prix HT par 1,196.
 - ▣ Pour calculer un prix HT, il suffit de diviser le prix TTC par 1,196.
- Pour un taux de TVA de 20 % :
 - ▣ Pour calculer un prix TTC, il suffit de multiplier le prix HT par 1,2.
 - ▣ Pour calculer un prix HT, il suffit de diviser le prix TTC par 1,2.
- Pour un taux de TVA de 5,5 % :
 - ▣ Pour calculer un prix TTC, il suffit de multiplier le prix HT par 1,055.
 - ▣ Pour calculer un prix HT, il suffit de diviser le prix TTC par 1,055.

Exemple :

- Quel est le prix HT d'un chapeau vendu 41,86 € si le taux de TVA est de 19,6 % ?

$$\text{Prix HT} = \text{Prix TTC} / 1,196 = 41,86 / 1,196 = 35 \text{ €}.$$



Attention : pour trouver un prix HT à partir d'un prix TTC, il ne faut surtout pas calculer la TVA à partir du prix TTC pour ensuite la retrancher. **La TVA s'applique seulement sur le prix HT.**

Dans l'exemple précédent si on avait posé l'opération suivante (fausse !) suivant la règle vue dans le chapitre « CALCULER LA VALEUR INITIALE APRÈS UNE DIMINUTION DE P % », on aurait obtenu :

$$\text{Prix HT} = 41,86 \times \left(1 - \frac{19,6}{100}\right) = 41,86 \times 0,804 \approx 33,65 \text{ € !!!}$$

Formules à connaître :

$$\text{A. Taux de TVA} = \frac{\text{Prix TTC}}{\text{Prix HT}} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{B. Prix TTC} &= \text{Prix HT} + (\text{Prix HT} \times \text{taux TVA}) \\ &\text{ou} \\ \text{Prix TTC} &= \text{Prix HT} \times (\text{taux TVA} + 1) \end{aligned}$$

$$\text{C. Prix HT} = \frac{\text{Prix TTC}}{\text{taux TVA} + 1}$$

- Pour A

Soit un prix TTC de 41,86 et prix HT de 35 €.

$$\text{Taux TVA} = \frac{41,86}{35} - 1 = 1,196 - 1 = 0,196 = 19,6/100 \text{ soit } 19,6 \text{ \%}.$$

- Pour B

Soit un prix HT de 35 € et un taux de TVA à 19,6 %.

$$\text{Prix TTC} = 35 + (35 \times 19,6/100) = 35 + (35 \times 0,196) = 35 + 6,86 = 41,86 \text{ €}.$$

Ou

$$\text{Prix TTC} = 35 + 35 \times (19,6/100 + 1) = 35 + 35 \times (0,196 + 1) = 35 + 35 \times 1,196 = 35 + 6,86 = 41,86 \text{ €}.$$

- Pour C

Soit un prix TTC de 41,86 et un taux de TVA de 19,6 %.

$$\text{Prix HT} = \frac{41,86}{\frac{19,6}{100} + 1} = \frac{41,86}{0,196 + 1} = \frac{41,86}{1,196} = 35 \text{ €}.$$



CORRESPONDANCES À CONNAÎTRE – pourcentage – fraction – nombre décimal

Certaines correspondances sont utiles à connaître afin de gagner du temps lors de la résolution d'un exercice.

$1\% = 1/100 = 0,01$	$12,5\% = 1/8 = 0,125$	$50\% = 1/2 = 0,05$	$100\% = 1$
$2\% = 2/100 = 0,02$	$20\% = 1/5 = 0,2$	$60\% = 3/5 = 0,6$	$200\% = 2$
$4\% = 1/25 = 0,04$	$25\% = 1/4 = 0,25$	$66,66\% \approx 2/3 \approx 0,66$	$1\,000\% = 10$
$5\% = 1/20 = 0,05$	$33,33\% \approx 1/3 \approx 0,333$	$75\% = 3/4 = 0,75$	
$10\% = 1/10 = 0,1$	$40\% = 2/5 = 0,4$	$80\% = 4/5 = 0,8$	

Équivalences également utiles

Doubler (soit $\times 2$) correspond à ajouter 100 %.

Tripler (soit $\times 3$) correspond à ajouter 200 %.

Quadrupler (soit $\times 4$) correspond à ajouter 300 %.

Quintupler (soit $\times 5$) correspond à ajouter 400 %.

Décupler (soit $\times 10$) correspond à ajouter 900 %.

Augmenter du tiers une valeur revient à multiplier par 1,33 cette valeur soit ajouter 33,33 %.

Diminuer du tiers une valeur revient à multiplier par 0,66 cette valeur soit diminuer de 33,33 %.

Augmenter du cinquième une valeur revient à multiplier par 1,2 cette valeur soit ajouter 20 %.

Diminuer du cinquième une valeur revient à multiplier par 0,8 cette valeur soit diminuer de 20 %.

NOTIONS DE MATHS FINANCIÈRES : INTÉRÊTS SIMPLES ET COMPOSÉS

Définitions

Capital initial (noté **Co**) : il correspond à la somme d'argent investie (ou prêtée) au départ.

Capital final (noté **Cn**) : il correspond à la somme d'argent détenue (ou due) au terme de **n** périodes de placement (ou de prêt).

Taux d'intérêt (noté **t**) : exprimé sous la forme d'un pourcentage, il s'applique sur le montant investi ou prêté. Sans autre précision, le taux d'intérêt est annuel.

Intérêt (noté **i**) : c'est le revenu d'une somme d'argent prêtée (ou placée). Le montant de l'intérêt est fonction du capital, du taux de placement et de la durée du placement.

Durée de placement (noté **n**) : il correspond au nombre de périodes de capitalisation (ou de prêt) (année, semestres, mois, quinzaines, jours). Dans le cas où l'unité de temps est l'année et où la durée de l'opération financière est comptée en jours, il convient de définir la durée de cette année. L'usage en France est de choisir l'année bancaire (ou année commerciale).

Une année bancaire ou commerciale compte 360 jours, 24 quinzaines, 12 mois.

Un mois bancaire compte 30 jours.

Lorsque la durée est calculée en jours, on tient compte du nombre exact de jours de chaque mois de l'année. Sans autre indication, le mois de février compte 28 jours.

On aura donc, en fraction d'années bancaires : $n = \frac{\text{nombre de jours}}{360}$

Calcul du nombre de jours (on ne compte pas le premier jour et on compte le dernier).

Exemple : durée d'un placement effectué du 6 septembre au 14 décembre :

Septembre : $30 - 6 = 24$

Octobre : 31

Novembre : 30

Décembre 14

Durée du placement : 99 jours

Pourquoi 360 jours ?

Cela fait référence à l'année lombarde, une pratique apparue au moyen-âge et attribuée aux banquiers lombards, qui consiste à calculer les intérêts d'un prêt sur la base d'une période de 360 jours (au lieu d'une année civile) afin de simplifier les calculs des intérêts dus pour des périodes inférieures à une année, le nombre 360 étant divisible par 2, 4, 6 et 12. La pratique a perduré.



Attention ! Sauf mention contraire, l'unité de temps prise comme référence est l'année bancaire ou commerciale. S'il est fait mention **d'année civile**, il faut alors considérer que l'année comporte 365 jours (366 jours si année bissextile).

On aura donc, en fraction d'années civiles : $n = \frac{\text{nombre de jours}}{365}$

Si la durée est calculée en quinzaines, on compte les quinzaines à partir du 1^{er} ou du 16 de chaque mois qui suit le dépôt, à partir du 1^{er} ou du 16 qui précède le retrait.

Les intérêts simples

Dans le cas d'intérêts simples, le taux d'intérêt ne s'applique que sur le capital initial (Co). Le montant des intérêts acquis ne rapporte pas d'intérêts supplémentaires.

Valeur du capital final

$$C_n = C_o \times (1 + t \times n)$$

De la même manière :

Capital final après n mois $\Rightarrow C_n = C_o \times (1 + t \times n/12)$

Capital final après n jours $\Rightarrow C_n = C_o \times (1 + t \times n/360)$

Capital final après n quinzaines $\Rightarrow C_n = C_o \times (1 + t \times n/24)$

Somme des intérêts acquis au cours de n périodes :

$$i = C_n - C_0 = C_0 \times t \times n$$

L'intérêt est proportionnel à la durée du prêt.

Intérêt après n années $I_n = C_0 \times t \times n$

Intérêt après n mois $I_m = C_0 \times t \times n/12$

Intérêt après n jours $I_j = C_0 \times t \times n/360$

Intérêt après n quinzaines $= C_0 \times t \times n/24$

Exemple 1

Louise place 1 200 € à un taux d'intérêt simple fixe de 4 % pendant 3 ans. Quel est le gain final de ce placement ?

Capital final $= C_0 \times t \times n = 1200 \times 4 / 100 \times 3 = 180$ €.

Exemple 2

Irène place 25 000 € à un taux annuel de 5 %. Quel sera le montant de son capital après 72 jours ?

Capital après 200 jours $= C_0 \times (1 + t \times 72/360) = 25\,000 \times (1 + 5/100 \times 0,2) = 25\,000 \times 1,01 = 25\,250$ €.

Les intérêts simples précomptés et postcomptés.

Dans un emprunt à intérêts simples, l'intérêt peut être remboursé en début ou en fin d'emprunt.

Lorsque l'intérêt est **payé en fin d'emprunt**, l'intérêt est dit **postcompté** : l'emprunteur dispose de C_0 en début d'emprunt et rembourse $C_0 \times (1 + t \times n)$ en fin d'emprunt.

Lorsque l'intérêt est payé en **début d'emprunt**, l'intérêt est dit **précompté** : l'emprunteur emprunte C_0 en début d'emprunt, mais reçoit C_0 moins le montant des intérêts $= C_0 \times (1 - t \times n)$ et rembourse C_0 en fin d'emprunt.

Sauf indication contraire, les intérêts simples sont postcomptés.

Les intérêts composés

La règle générale est d'utiliser l'intérêt composé pour des placements dont la période est supérieure à un an. Un placement est fait à intérêts composés quand, au terme de chaque période, l'intérêt acquis à la fin de cette période est incorporé au capital pour produire lui-même des intérêts pendant la période suivante. On dit que les intérêts sont capitalisés ; l'unité de temps est appelée période de capitalisation et le taux d'intérêt est appelé taux de capitalisation.

Lors du placement à intérêts composés d'un capital C_0 pendant n périodes au taux t par période, le capital final, appelé **valeur acquise**, est :

Valeur du capital final (valeur acquise)

$$C_n = C_0 \times (1 + t)^n$$

Formule de calcul inversée :

On peut inversement calculer le capital qu'il faut placer au taux t par période pendant n périodes pour obtenir un capital C_n . Ce capital C_0 qu'il faut placer s'appelle la **valeur actuelle**.

Valeur du capital initial (valeur actuelle)

$$C_0 = C_n \times (1 + t)^{-n} = \frac{C_n}{(1+t)^n}$$

Calcul de l'intérêt

Puisque le capital de départ était C_0 , l'intérêt total (I_n) est :

$$I_n = C_n - C_0 = C_0 \times [(1 + t)^n - 1]$$

Exemple 1

Sylvain place 2 000 € à un taux d'intérêt composé fixe de 10 % pendant 25 ans. Quel sera le montant du capital final ?

$$C_n = C_0 \times (1 + t)^n$$

$$C_n = 2\,000 \times (1 + 10 / 100)^{25} = 2\,000 \times 1,1^{25} = 2\,000 \times 1,21 = 2\,420 \text{ €}.$$

Exemple 2

Kristina place 5 000 € sur un compte épargne à un taux d'intérêt composé de 2 % par an. Quelle somme détiendra-t-elle au terme de 3 ans ?

$$C_n = 5\,000 \times (1 + 2 / 100)^3 = 5\,000 \times 1,02^3 = 5\,000 \times 1,0404 = 5\,202 \text{ €}.$$

Exemple 3

Silvia veut disposer d'un capital de 2 000 € environ dans 2 ans. La banque lui propose un placement à taux d'intérêt composé fixe de 6 %. Quelle somme doit-elle placer au départ ?

$$C_0 = 2\,000 \times (1 + 6 / 100)^{-2} = 2\,000 \times 1,06^{-2} \approx 2\,000 \times 0,88999 \approx 1\,780 \text{ €}.$$

Taux moyen de placement

Le taux moyen de plusieurs placements est le taux unique T auquel il aurait fallu placer les différents capitaux pour obtenir un intérêt égal à la somme des intérêts produits par chacun d'eux, placés à des taux différents.

Soit une société qui effectue simultanément les placements $C_1, C_2, \dots, C_i$ aux taux respectifs $t_1, t_2, \dots, t_i$ pour les durées respectives $n_1, n_2, \dots, n_i$. On note que tous les taux ne sont pas égaux entre eux et les durées sont généralement exprimées en nombre de jours.

$$\text{Intérêt total } I = C_1 \times t_1 \times n_1/360 + \dots + C_i \times t_i \times n_i/360.$$

On appelle taux moyen de cet ensemble de placement le taux unique T qui, appliqué aux capitaux placés et pour leur durée respective, conduirait au même intérêt total.

Formule du taux moyen de placement :

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \times t_i \times n_i}{\sum_{i=1}^n C_i \times n_i}$$

Soit un capital C1 au taux t1 pendant une durée n1 qui produit un intérêt i1.

Soit un capital C2 au taux t2 pendant une durée n2 qui produit un intérêt i2.

Soit un capital C3 au taux t3 pendant une durée n3 qui produit un intérêt i3.

Recherchons le taux moyen T qui appliqué aux capitaux C1, C2 et C3 pendant les mêmes périodes produit un intérêt égal à i1 + i2 + i3.

$$i1 + i2 + i3 = C1 \times t1 \times n1 + C2 \times t2 \times n2 + C3 \times t3 \times n3$$

$$\text{De même : } i1 + i2 + i3 = C1 \times T \times n1 + C2 \times T \times n2 + C3 \times T \times n3$$

$$C1 \times t1 \times n1 + C2 \times t2 \times n2 + C3 \times t3 \times n3 = C1 \times T \times n1 + C2 \times T \times n2 + C3 \times T \times n3$$

$$C1 \times t1 \times n1 + C2 \times t2 \times n2 + C3 \times t3 \times n3 = T \times (C1 \times n1 + C2 \times n2 + C3 \times n3).$$

$$T = \frac{C1 \times t1 \times n1 + C2 \times t2 \times n2 + C3 \times t3 \times n3}{C1 \times n1 + C2 \times n2 + C3 \times n3}$$

Exemple :

Soit un premier placement de 3 500 € pendant 4 mois à un taux simple de 5 % annuels

Soit un deuxième placement de 5 000 € pendant 2 mois à un taux simple de 3,5 % annuels.

À quel taux unique faut-il placer ces deux capitaux pour générer le même intérêt ?

$$T = (3\,500 \times 0,05 \times 4 / 12 + 5\,000 \times 0,035 \times 2 / 12) / (3\,500 \times 4 / 12 + 5\,000 \times 2 / 12)$$

$$T \simeq (175 \times 4 / 12 + 175 \times 2 / 12) / 1\,666,666 + 833,333$$

$$T \simeq (175 \times 6 / 12) / 2\,000$$

$$T \simeq 0,04375 = 4,375 \, \%$$